

课前预习记录：____月____日 星期____

1.1 集合的概念



一、集合的概念

1. 集合与元素

一般地,我们把____统称为元素,用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示.把____组成的总体叫做集合,用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

2. 元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A , 记作____; 如果 a 不是集合 A 中的元素,就说 a 不属于集合 A , 记作____.

3. 集合中元素的特征

(1)____: 集合中的元素是否属于这个集合是确定的,即任何对象都能明确它是或不是某个集合的元素,两者必居其一.这是判断一组对象是否构成集合的标准.

(2)____: 给定集合的元素是互不相同的.即对于一个给定的集合,它的任何两个元素都是不同的.

(3)____: 集合中各元素间无先后排列的要求,没有一定的顺序关系.

4. 集合相等

只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是相等的.

二、常用的数集及其记法

1. 全体____组成的集合称为非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

2. 所有____组成的集合称为正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

3. 全体____组成的集合称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

4. 全体____组成的集合称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

5. 全体____组成的集合称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

三、集合的表示方法

1. 列举法

把集合的元素____出来,并用花括号“ $\{\}$ ”括起来表示集合的方法叫做列举法.

2. 描述法

用集合所含元素的____表示集合的方法称为描述法.具体方法是:在花括号内先写上表示这个集合元素

不积跬步,无以至千里;
不积小流,无以成江海。

的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的_____.

参考答案：

一、1. 研究对象 一些元素 2. $a \in A$ $a \notin A$ 3. 确定性 互异性 无序性

二、1. 非负整数 2. 正整数 3. 整数 4. 有理数 5. 实数

三、1. 一一列举 2. 共同特征 共同特征



练一练

一、单选题

1. 若集合 $A = \{(1,2), (3,4)\}$ ，则集合 A 中元素的个数是()

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

【答案】B

【解析】

集合 $A = \{(1,2), (3,4)\}$ 中有两个元素，(1,2)和(3,4)

故选 B.

2. 若由 a^2 ， $2019a$ 组成的集合 M 中有两个元素，则 a 的取值可以是 ()

- A. 0
B. 2019
C. 1
D. 0 或 2019

【答案】C

【分析】

根据集合的元素互异性判断即可.

【详解】

若集合 M 中有两个元素，则 $a^2 \neq 2019a$. 即 $a \neq 0$ 且 $a \neq 2019$.

故选：C.

3. 下面有四个语句：

- ①集合 N^* 中最小的数是 0;
② $-a \notin N$ ，则 $a \in N$;
③ $a \in N$ ， $b \in N$ ，则 $a+b$ 的最小值是 2;
④ $x^2+1=2x$ 的解集中含有两个元素.

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

其中说法正确的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】A

【分析】

根据题意依次判断即可.

【详解】

因为 N^* 是不含 0 的自然数, 所以①错误;

取 $a = \sqrt{2}$, 则 $-\sqrt{2} \notin N$, $\sqrt{2} \notin N$, 所以②错误;

对于③, 当 $a=b=0$ 时, $a+b$ 取得最小值是 0, 而不是 2, 所以③错误;

对于④, 解集中只含有元素 1, 故④错误.

故选: A

4. 下列判断正确的个数为 ()

- (1) 所有的等腰三角形构成一个集合;
- (2) 倒数等于它自身的实数构成一个集合;
- (3) 质数的全体构成一个集合;
- (4) 由 2, 3, 4, 3, 6, 2 构成含有 6 个元素的集合.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【分析】

利用集合的定义和特点逐一判断即可.

【详解】

在 (1) 中, 所有的等腰三角形构成一个集合, 故 (1) 正确;

在 (2) 中, 若 $\frac{1}{a} = a$, 则 $a^2 = 1$, $\therefore a = \pm 1$, 构成的集合为 $\{1, -1\}$, 故 (2) 正确;

在 (3) 中, 质数的全体构成一个集合, 任何一个质数都在此集合中, 不是质数的都不在, 故 (3) 正确;

在 (4) 中, 集合中的元素具有互异性, 构成的集合为 $\{2, 3, 4, 6\}$, 含 4 个元素, 故 (4) 错误.

故选: C.

5. 下列说法中正确的是 ()

- A. 班上爱好足球的同学, 可以组成集合
- B. 方程 $x(x-2)^2=0$ 的解集是 $\{2, 0, 2\}$

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

C. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是有限集

D. 集合 $\{x|x^2+5x+6=0\}$ 与集合 $\{x^2+5x+6=0\}$ 是含有相同元素的集合

【答案】C

【分析】

根据构成集合中对象的确定性判断 A，由集合中元素的互异性判断 B，根据集合有限集的定义判断 C，分析集合中元素判断 D.

【详解】

班上爱好足球的同学是不确定的，所以构不成集合，选项 A 不正确；

方程 $x(x-2)^2=0$ 的所有解的集合可表示为 $\{2, 0, 2\}$ ，由集合中元素的互异性知，选项 B 不正确；

集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中有 4 个元素，所以集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 是有限集，选项 C 正确；

集合 $\{x^2+5x+6=0\}$ 是列举法，表示一个方程的集合， $\{x|x^2+5x+6=0\}$ 表示的是方程的解集，是两个不同的集合，选项 D 不正确.

故选：C.

6. $M = \{x \in \mathbf{R} | (1+k^2)x \leq k^4 + 4\}$ ，对任意的 $k \in \mathbf{R}$ ，总有 ()

A. $2 \notin M, 0 \notin M$ B. $2 \in M, 0 \in M$ C. $2 \in M, 0 \notin M$ D. $2 \notin M, 0 \in M$

【答案】B

【分析】

依次将 $x=0$ 和 $x=2$ 代入讨论求解即可得答案.

【详解】

解：将 $x=0$ 代入得 $k^4 + 4 \geq 0$ 显然成立，故 $0 \in M$

将 $x=2$ 代入不等式得 $k^4 + 4 \geq 2k^2 + 2$ ，即 $(k^2-1)^2 + 1 \geq 0$ ，显然成立， $\therefore 2 \in M$ ；

所以 $2 \in M, 0 \in M$

故选：B.

7. 设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，集合 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, b, \frac{b}{a}\right\}$ ，则 $b-a$ 等于 ()

A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

【答案】D

【分析】

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

根据集合相等，得到集合中的元素相同，依次得到 a, b 的值.

【详解】

两个集合相等，则集合中的元素相同，

$a \neq 0$ ，所以 $a+b=0$ ，则 $\frac{b}{a}=-1$ ，那么 $b=1$ ，和 $a=-1$ ，

所以 $b-a=2$.

故选：D

8. 集合 $\{x \in \mathbf{N} \mid x-3 < 2\}$ 用列举法表示是 ()

A. $\{1, 2, 3, 4\}$

B. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

C. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

【答案】D

【分析】

解出不等式，确定出不等式的解集中的自然数即得.

【详解】

由 $x-3 < 2$ 得 $x < 5$ ，又 $x \in \mathbf{N}$ ，所以集合表示为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

故选：D.

9. 下列关系中正确的是 ()

A. $\sqrt{2} \notin \mathbf{R}$

B. $0 \in \mathbf{N}^*$

C. $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$

D. $\pi \in \mathbf{Z}$

【答案】C

【分析】

根据元素与集合的关系判断出各选项中元素与集合关系的正误.

【详解】

由题意可知， $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ ， $0 \notin \mathbf{N}^*$ ， $\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$ ， $\pi \notin \mathbf{Z}$ ，因此，C 选项正确.

故选 C.

【点睛】

本题考查元素与集合关系正误的判断，考查推理能力，属于基础题.

10. 下列各组中的集合 P 与 Q 表示同一个集合的是 ()

A. P 是由元素 $1, \sqrt{3}, \pi$ 构成的集合, Q 是由元素 $\pi, 1, |-\sqrt{3}|$ 构成的集合

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

- B. P 是由 π 构成的集合, Q 是由 3.14159 构成的集合
- C. P 是由 2,3 构成的集合, Q 是由有序数对 (2,3) 构成的集合
- D. P 是满足不等式 $-1 \leq x \leq 1$ 的自然数构成的集合, Q 是方程 $x^2=1$ 的解集

【答案】A

【详解】

对于 A, 集合 P, Q 中的元素完全相同, 所以 P 与 Q 表示同一个集合, 对于 B, C, D, 集合 P, Q 中的元素不相同, 所以 P 与 Q 不能表示同一个集合.

选 A

二、多选题

11. 下列与集合 $M = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x+y=1 \\ x-y-3=0 \end{cases} \right\}$ 表示同一个集合的有 ()

- A. $\{(2, -1)\}$ B. $\{2, -1\}$
- C. $\{(x, y) \mid x=2, y=-1\}$ D. $\{x=2, y=-1\}$

【答案】AC

【分析】

解方程组可得集合中的元素为有序数对 (2, -1), 根据集合的表示方法可得答案.

【详解】

$$\text{由 } \begin{cases} x+y=1, \\ x-y-3=0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x=2, \\ y=-1, \end{cases} \text{ 即 } M = \{(2, -1)\},$$

所以根据集合的表示方法知 A, C 与集合 M 表示的是同一个集合,

故选: AC.

【点睛】

本题考查同一集合问题, 考查集合的表示方法, 属于基础题.

12. 设集合 $A = \{x \mid x^2 + x = 0\}$, 则下列表述不正确的是 ()

- A. $\{0\} \in A$ B. $1 \notin A$ C. $\{-1\} \in A$ D. $0 \in A$

【答案】AC

【分析】

求出集合 $A = \{x \mid x^2 + x = 0\} = \{0, -1\}$, 利用元素与集合的关系能判断正确结果.

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

【详解】

解：集合 $A = \{x | x^2 + x = 0\} = \{0, -1\}$,

$\therefore 0 \in A, -1 \in A, \{0\} \subset A, \{-1\} \subset A, 1 \notin A$.

$\therefore$ AC 选项均不正确, BD 选项正确.

故选: AC.

【点睛】

本题主要考查元素与集合的关系, 属于基础题.

13. 已知集合 $M = \{-2, 3x^2 + 3x - 4, x^2 + x - 4\}$, 若 $2 \in M$, 则满足条件的实数 x 可能为 ()

A. 2

B. -2

C. -3

D. 1

【答案】AC

【分析】

根据集合元素的互异性 $2 \in M$ 必有 $2 = 3x^2 + 3x - 4$ 或 $2 = x^2 + x - 4$, 解出后根据元素的互异性进行验证即可.

【详解】

解: 由题意得, $2 = 3x^2 + 3x - 4$ 或 $2 = x^2 + x - 4$,

若 $2 = 3x^2 + 3x - 4$, 即 $x^2 + x - 2 = 0$,

$\therefore x = -2$ 或 $x = 1$,

检验: 当 $x = -2$ 时, $x^2 + x - 4 = -2$, 与元素互异性矛盾, 舍去;

当 $x = 1$ 时, $x^2 + x - 4 = -2$, 与元素互异性矛盾, 舍去.

若 $2 = x^2 + x - 4$, 即 $x^2 + x - 6 = 0$,

$\therefore x = 2$ 或 $x = -3$,

经验证 $x = 2$ 或 $x = -3$ 为满足条件的实数 x .

故选: AC.

【点睛】

本题主要考查集合中元素的互异性, 属于基础题.

三、填空题

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

14. 用列举法表示集合 $A = \left\{ x \mid x \in \mathbf{Z}, \frac{8}{6-x} \in \mathbf{N} \right\}$: _____.

【答案】 $\{5, 4, 2, -2\}$

【分析】

根据 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{Z}$ 所对应集合中元素的特点，判断出 x 的取值，然后根据列举法得到集合 A 。

【详解】

$\because x \in \mathbf{Z}, \frac{8}{6-x} \in \mathbf{N}, \therefore 6-x \in \{1, 2, 4, 8\}$. 此时 $x \in \{5, 4, 2, -2\}$ ，即 $A = \{5, 4, 2, -2\}$ 。

【点睛】

本题考查利用列举法表示集合，难度较易。注意列举法表示集合很直观、灵活、简便，但不适用于元素多的集合。

15. 用描述法表示被 4 除余 3 的正整数集合：_____.

【答案】 $\{x \mid x = 4n + 3, n \in \mathbf{N}\}$

【分析】

设该数为 x ，则该数 x 满足 $x = 4n + 3, n \in \mathbf{N}$ ；再写成集合的形式。

【详解】

设该数为 x ，则该数 x 满足 $x = 4n + 3, n \in \mathbf{N}$ ；

$\therefore$ 所求的正整数集合为 $\{x \mid x = 4n + 3, n \in \mathbf{N}\}$ 。

故答案为： $\{x \mid x = 4n + 3, n \in \mathbf{N}\}$ 。

【点睛】

本题主要考查集合的表示方法，属于基础题。

16. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + a = 0\}$ ，若 $4 \in A$ ，则集合 A 用列举法表示为_____.

【答案】 $\{-1, 4\}$ 。

【分析】

先将 4 代入，解出 a 的值，然后求出方程的另外一个根并写出集合 A 。

【详解】

$\because 4 \in A, \therefore 16 - 12 + a = 0, \therefore a = -4,$

$\therefore A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\} = \{-1, 4\}$ 。

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

故答案为: $\{-1, 4\}$.

【点睛】

本题考查根据元素与集合的关系求解参数的值, 属于简单题.

17. 定义集合运算 $A \odot B = \{z \mid z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 集合 $A = \{0, 1\}, B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 所有元素之和为_____

【答案】18

【分析】

由题意可得 $z = 0, 6, 12$, 进而可得结果.

【详解】

当 $x = 0, y = 2, \therefore z = 0$

当 $x = 1, y = 2, \therefore z = 6$

当 $x = 0, y = 3, \therefore z = 0$

当 $x = 1, y = 3, \therefore z = 12$

和为 $0+6+12=18$

故答案为: 18

四、解答题

18. 用适当的方法表示下列集合:

- (1) 大于 2 且小于 5 的有理数组成的集合.
- (2) 24 的正因数组成的集合.
- (3) 自然数的平方组成的集合.
- (4) 由 0, 1, 2 这三个数字抽出一部分或全部数字(没有重复)所组成的自然数组成的集合.

【答案】(1) 答案见解析; (2) 答案见解析; (3) 答案见解析; (4) 答案见解析.

【分析】

- (1) 集合有无限个元素, 利用描述法求解;
- (2) 集合中元素较少, 利用列举法求解;
- (3) 集合有无限个元素, 利用描述法求解;
- (4) 集合中元素较少, 利用列举法求解;

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

【详解】

- (1) 用描述法表示为 $\{x|2 < x < 5 \text{ 且 } x \in Q\}$.
- (2) 用列举法表示为 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
- (3) 用描述法表示为 $\{x|x=n^2, n \in N\}$.
- (4) 用列举法表示为 $\{0, 1, 2, 10, 12, 20, 21, 102, 120, 210, 201\}$.

19. 把下列集合用另一种方法表示出来:

- (1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$;
- (2) $\{x \in N | 3 < x < 7\}$;

【答案】(1) $\{x|x=2k, k \in Z \text{ 且 } 1 \leq k \leq 5\}$; (2) $\{4, 5, 6\}$.

【分析】

- (1) 根据集合中的元素都是偶数用描述法进行表示即可;
- (2) 用列举法表示即可.

【详解】

- (1) 因为集合中的元素都是偶数,

所以 $\{2, 4, 6, 8, 10\} = \{x|x=2k, k \in Z \text{ 且 } 1 \leq k \leq 5\}$;

- (2) $\{x \in N | 3 < x < 7\} = \{4, 5, 6\}$.

20. 若集合 $A = \{x | kx^2 - 8x + 16 = 0\}$ 中只有一个元素, 试求实数 k 的值, 并用列举法表示集合 A .

【答案】实数 k 的值为 0 或 1, 当 $k=0$ 时, $A=\{2\}$; 当 $k=1$, $A=\{4\}$

【分析】

集合 $A = \{x | kx^2 - 8x + 16 = 0\}$ 中只有一个元素, 即方程 $kx^2 - 8x + 16 = 0$ 只有一个解, 再讨论当 $k=0$ 时, 当 $k \neq 0$ 时方程的解的个数, 再求集合 A 即可.

【详解】

解: 由集合 $A = \{x | kx^2 - 8x + 16 = 0\}$ 中只有一个元素,

即方程 $kx^2 - 8x + 16 = 0$ 只有一个解,

①当 $k=0$ 时, 方程为 $-8x + 16 = 0$, 解得 $x=2$, 即 $A=\{2\}$;

②当 $k \neq 0$ 时, 方程 $kx^2 - 8x + 16 = 0$ 只有一个解, 则 $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 16 \times k = 0$, 即 $k=1$,

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

即方程为 $x^2 - 8x + 16 = 0$ ，解得 $x = 4$ ，即 $A = \{4\}$ ，

综合①②可得：实数 k 的值为 0 或 1，当 $k = 0$ 时， $A = \{2\}$ ；当 $k = 1$ ， $A = \{4\}$ 。

【点睛】

本题考查了方程的解的个数问题，重点考查了分类讨论的数学思想方法，属基础题。

21. 集合 A 是由形如 $m + \sqrt{3}n$ ($m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$) 的数构成的，试分别判断 $a = -\sqrt{3}$ ， $b = \frac{1}{3 - \sqrt{3}}$ ，

$c = (1 - 2\sqrt{3})^2$ 与集合 A 的关系。

【答案】 $a \in A$ ， $b \notin A$ ， $c \in A$

【分析】

考虑 a 、 b 、 c 是否可以写成 $m + \sqrt{3}n$ ($m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$) 的形式，若可以则是属于关系，反之则是不属于关系。

【详解】

$\because a = -\sqrt{3} = 0 + (-1) \times \sqrt{3}$ ，而 $0, -1 \in \mathbf{Z}$ ， $\therefore a \in A$ ， $\because b = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ ， $\therefore b \notin A$ ； $\because$

$c = (1 - 2\sqrt{3})^2 = 13 + (-4) \times \sqrt{3}$ ，而 $13, -4 \in \mathbf{Z}$ ， $\therefore c \in A$ 。

【点睛】

本题考查元素与集合关系的判定，难度一般。当集合是一个特殊的数集时，判断元素是否属于集合，则需要考虑是否能够通过一定的化简手段将元素能写成特殊数集的形式。

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。