

课前预习记录：____月____日 星期____

1.4 充分条件与必要条件



学新知

1. 充分条件与必要条件

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q . 这时，我们就说，由 p 可推出 q ，记作____，并且说 p 是 q 的充分条件， q 是 p 的必要条件.

如果“若 p ，则 q ”为假命题，那么由 p 推不出 q ，记作 $p \nRightarrow q$. 此时， p 不是 q 的充分条件， q 不是 p 的必要条件.

2. 充要条件

一般地，如果既有 $p \Rightarrow q$ ，又有 $q \Rightarrow p$ ，就记作____. 此时，我们说， p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件. 显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

概括地说，如果 $p \Leftrightarrow q$ ，那么 p 与 q 互为充要条件.

注意：(1) 判断 p 是 q 的什么条件，结果只有四种：充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分又不必要条件. (2) 充分条件、必要条件具有传递性.

3. 从集合的角度判断充分条件、必要条件和充要条件

从集合的观点看，设集合 $A = \{x | x \text{ 满足条件 } p\}$ ， $B = \{x | x \text{ 满足条件 } q\}$ ，

若 $A \subseteq B$ ，则 p 是 q 的充分条件或 q 是 p 的必要条件；

若 $A \supseteq B$ ，则 p 是 q 的必要条件或 q 是 p 的充分条件；

若 $A = B$ ，则 p 是 q 的充要条件；

若 $A \not\subseteq B$ ，且 $A \not\supseteq B$ ，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

参考答案：

1. $p \Rightarrow q$

2. $p \Leftrightarrow q$



练一练

一、单选题

1. “ $x=3$ ”是“ $|x|=3$ ”的().

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】

根据充分条件，必要条件的定义即可解出.

【详解】

因为 $x=3 \Rightarrow |x|=3$ ，但是 $|x|=3 \Rightarrow x=\pm 3$ ，所以“ $x=3$ ”是“ $|x|=3$ ”的充分不必要条件.

故选：A.

2. 荀子曰：“故不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”这句来自先秦时期的名言阐述了做事情不一点一点积累，就永远无法达成目标的哲理. 由此可得，“积跬步”是“至千里”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】

直接利用定义法进行判断即可.

【详解】

荀子的名言表明积跬步未必能至千里，但要至千里必须积跬步，

故“积跬步”是“至千里”的必要不充分条件.

故选：B

3. 若 a 、 b 为实数，则“ $ab>1$ ”是“ $b>\frac{1}{a}$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【分析】

利用推理判断或举特例说明命题“若 $ab>1$ ，则 $b>\frac{1}{a}$ ”和“若 $b>\frac{1}{a}$ ，则 $ab>1$ ”的真假即可作答.

【详解】

若 $ab>1$ 成立，取 $a=-1, b=-2$ ，而 $-2 < \frac{1}{-1}$ ，即命题“若 $ab>1$ ，则 $b>\frac{1}{a}$ ”是假命题，

若 $b>\frac{1}{a}$ 成立，取 $a=-1, b=2$ ，而 $(-1)\cdot 2 < 0$ ，即命题“若 $b>\frac{1}{a}$ ，则 $ab>1$ ”是假命题，

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

所以“ $ab > 1$ ”是“ $b > \frac{1}{a}$ ”的既不充分也不必要条件.

故选：D

4. 已知 $p: 0 < x < 2$, $q: -1 < x < 3$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分不必要条件

【答案】A

【分析】

根据充分和必要条件的定义即可求解.

【详解】

由 $p: 0 < x < 2$, 可得出 $q: -1 < x < 3$,

由 $q: -1 < x < 3$, 得不出 $p: 0 < x < 2$,

所以 p 是 q 的充分而不必要条件,

故选：A.

5. “ $x^2 + x - 2 = 0$ ”是“ $x = 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】

判断命题：“若 $x^2 + x - 2 = 0$, 则 $x = 1$ ”和命题“若 $x = 1$, 则 $x^2 + x - 2 = 0$ ”的真假即可得解.

【详解】

当 $x^2 + x - 2 = 0$ 时, $x = -2$ 或 $x = 1$, 即命题“若 $x^2 + x - 2 = 0$, 则 $x = 1$ ”是假命题,

而 $x = 1$ 时, $x^2 + x - 2 = 0$ 成立, 即命题“若 $x = 1$, 则 $x^2 + x - 2 = 0$ ”是真命题,

所以“ $x^2 + x - 2 = 0$ ”是“ $x = 1$ ”的必要不充分条件.

故选：B

6. 设乙的充分不必要条件是甲, 乙是丙的充要条件, 丁是丙的必要不充分条件, 那么甲是丁的 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

C. 充要

D. 既不充分又不必要

【答案】A

【分析】

根据充分条件、必要条件的推导关系判断即可；

【详解】

解：甲是乙的充分不必要条件，即 $甲 \Rightarrow 乙$ ， $乙 \not\Rightarrow 甲$ ，

乙是丙的充要条件，即 $乙 \Leftrightarrow 丙$ ，

丁是丙的必要非充分条件，即 $丙 \Rightarrow 丁$ ， $丁 \not\Rightarrow 丙$ ，

所以 $甲 \Rightarrow 丁$ ， $丁 \not\Rightarrow 甲$ ，即甲是丁的充分不必要条件，

故选：A.

7. 已知 s, r 都是 q 的充分条件， p 是 q 的必要条件， r 是 p 的必要条件，则 ()

A. s 是 r 的既不充分也不必要条件

B. s 是 p 的必要条件

C. q 是 r 的必要不充分条件

D. p 是 r 的充要条件

【答案】D

【分析】

根据题意得到 $q \Leftrightarrow p, p \Leftrightarrow r, q \Leftrightarrow r$ ，再逐项判断，即可求解.

【详解】

由题意， s, r 都是 q 的充分条件， p 是 q 的必要条件， r 是 p 的必要条件，

可得 $s \Rightarrow q, r \Rightarrow q, q \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ ，所以 $q \Leftrightarrow p, p \Leftrightarrow r, q \Leftrightarrow r$ ，所以 $s \Rightarrow r$ ，

所以 s 是 r 的充分条件，故 A 错误；

s 是 p 的充分条件，故 B 错误；

q 是 r 的充要条件，故 C 错误；

p 是 r 的充要条件，故 D 正确；

故选：D.

8. 已知命题 P : 三角形是等腰三角形，命题 q : 三角形是等边三角形，则 p 是 q 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【分析】

根据充分、必要条件的定义，即可得出结论.

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

【详解】

等边三角形是等腰三角形，而等腰三角形不一定是等边三角形，

“三角形是等腰三角形”是“三角形是等边三角形”的必要不充分条件.

故选:B.

【点睛】

本题考查充分不必要条件的判定，属于基础题.

二、多选题

9. 下列各题中， p 是 q 的充要条件的有 ()

A. p : 四边形是正方形; q : 四边形的对角线互相垂直且平分

B. p : 两个三角形相似; q : 两个三角形三边成比例

C. p : $xy > 0$; q : $x > 0, y > 0$;

D. p : $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根; q : $a+b+c=0(a \neq 0)$

【答案】BD

【分析】

利用充要条件的定义，对选项逐一判断 p, q 能否等价互推，即知 p 是否是 q 的充要条件.

【详解】

A 选项, p : 四边形是正方形, q : 四边形的对角线互相垂直且平分, 因为对角线互相垂直且平分的四边形不一定是正方形, 也可能为菱形, 所以 q 推不出 p , 所以 p 不是 q 的充要条件;

B 选项, p : 两个三角形相似, q : 两个三角形三边成比例, 因为“若 p , 则 q ”是相似三角形的性质定理, “若 q , 则 p ”是相似三角形的判定定理, 所以它们均为真命题, 即 p, q 能等价互推, 所以 p 是 q 的充要条件.

C 选项, $p: xy > 0, q: x > 0, y > 0$, 因为 $xy > 0$ 时, $x > 0, y > 0$ 不一定成立, 也可能 $x < 0, y < 0$, 所以 p 推不出 q , 所以 p 不是 q 的充要条件;

D 选项, $p: x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根, $q: a+b+c=0(a \neq 0)$.

将 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx+c=0$ 得, $a+b+c=0(a \neq 0)$, 即“若 p , 则 q ”为真命题, 若

$a+b+c=0(a \neq 0)$, 则 $x=1$ 时, 方程左式 $= a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c = 0$, 即 $x=1$ 适合方程, $x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根, 故“若 q , 则 p ”均为真命题, 即 p, q 能等价互推, 所以 p 是 q 的充要条件.

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

所以 BD 中, p 是 q 的充要条件.

故选: BD.

10. 下列哪项是“ $a > 1$ ”的充分不必要条件 ()

- A. $a > 2$ B. $a > 3$ C. $a < 2$ D. $a < 3$

【答案】AB

【分析】

根据若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 p 对应集合是 q 对应集合的真子集, 以此判断选项;

【详解】

对于 A, $\{a | a > 2\}$ 是 $\{a | a > 1\}$ 的真子集, 故“ $a > 2$ ”是“ $a > 1$ ”的充分不必要条件, 故 A 正确;

对于 B, 同理 A 可知“ $a > 3$ ”是“ $a > 1$ ”的充分不必要条件, 故 B 正确;

对于 C, $a < 2$ 不能推出 $a > 1$, $a > 1$ 也不能推出 $a < 2$, 故“ $a < 2$ ”是“ $a > 1$ ”的既不充分也不必要条件, 故 C 错误;

对于 D, 同理可知“ $a < 3$ ”是“ $a > 1$ ”的既不充分也不必要条件, 故 D 错误;

故选: AB

【点睛】

结论点睛: 本题考查充分不必要条件的判断, 一般可根据如下规则判断:

- (1) 若 p 是 q 的必要不充分条件, 则 q 对应集合是 p 对应集合的真子集;
- (2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 p 对应集合是 q 对应集合的真子集;
- (3) 若 p 是 q 的充分必要条件, 则 p 对应集合与 q 对应集合相等;
- (4) 若 p 是 q 的既不充分又不必要条件, q 对的集合与 p 对应集合互不包含.

三、填空题

11. 已知 $p: x > 2$, $q: x > 1$, 则 p 是 q 的_____ (充分条件”、“必要条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”中选择一个填空).

【答案】充分条件

【分析】

根据集合关系判断即可得答案.

【详解】

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

设命题 $p: x > 2$ 对应的集合为 $A = \{x | x > 2\}$,

命题 $q: x > 1$ 对应的集合为 $B = \{x | x > 1\}$,

因为 $A \subsetneq B$, 所以命题 p 是命题 q 的充分条件.

故答案为: 充分条件.

【点睛】

结论点睛: 本题考查充分不必要条件的判断, 一般可根据如下规则判断:

- (1) 若 p 是 q 的必要不充分条件, 则 q 对应集合是 p 对应集合的真子集;
- (2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 p 对应集合是 q 对应集合的真子集;
- (3) 若 p 是 q 的充分必要条件, 则 p 对应集合与 q 对应集合相等;
- (4) 若 p 是 q 的既不充分又不必要条件, 则 q 对的集合与 p 对应集合互不包含.

12. “ $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ”是“ $a + b \neq 3$ ”成立的_____条件.

【答案】 必要不充分

【分析】

利用逆否命题的等价性, 转化后, 判断充分, 要条件.

【详解】

$a + b = 3$, 不能推出 $a = 1$ 且 $b = 2$, 反过来, $a = 1$ 且 $b = 2$ 能推出 $a + b = 3$, 所以 $a + b = 3$ 是 $a = 1$ 且 $b = 2$ 的必要不充分条件, 利用逆否关系的等价性可知 $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ 是 $a + b \neq 3$ 的必要不充分条件.

故答案为: 必要不充分

【点睛】

关键点点睛: 本题的关键是利用逆否命题的等价性, 判断充分, 必要条件, 即“ $a \neq 1$ 或 $b \neq 2$ ”是“ $a + b \neq 3$ ”成立的条件, 就是 $a + b = 3$ 是 $a = 1$ 且 $b = 2$ 成立的条件.

13. 已知条件 $p: m \leq x \leq 2m (m > 0)$, 条件 $q: 1 \leq x \leq 4$, 且 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[1, 2]$

【分析】

由题可得 $[m, 2m] \subsetneq [1, 4]$, 可求解.

【详解】

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

$\therefore P$ 是 Q 的充分不必要条件,

$$\therefore [m, 2m] \subsetneq [1, 4],$$

$$\text{需满足} \begin{cases} m \geq 1 \\ 2m \leq 4 \end{cases}, \text{解得 } 1 \leq m \leq 2,$$

综上, m 的取值范围是 $[1, 2]$.

故答案为: $[1, 2]$.

【点睛】

结论点睛: 本题考查根据充分不必要条件求参数, 一般可根据如下规则判断:

- (1) 若 P 是 Q 的必要不充分条件, 则 Q 对应集合是 P 对应集合的真子集;
- (2) 若 P 是 Q 的充分不必要条件, 则 P 对应集合是 Q 对应集合的真子集;
- (3) 若 P 是 Q 的充分必要条件, 则 P 对应集合与 Q 对应集合相等;
- (4) 若 P 是 Q 的既不充分又不必要条件, 则 Q 对应的集合与 P 对应集合互不包含.

四、解答题

14. 设集合 $A = \{1, 2\}$,

- (1) 请写出一个集合 B , 使“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, 但“ $x \in A$ ”不是“ $x \in B$ ”的必要条件;
- (2) 请写出一个集合 B , 使“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 但“ $x \in A$ ”不是“ $x \in B$ ”的充分条件.

【答案】(1) $B = \{1, 2, 3\}$ (答案不唯一); (2) $B = \{1\}$ (答案不唯一)

【分析】

根据充分必要性判断集合 A 与集合 B 之间的包含关系, 从而写出符合题意的集合 B .

【详解】

(1) 由于“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分条件, 但“ $x \in A$ ”不是“ $x \in B$ ”的必要条件, 所以集合 A 是集合 B 的真子集, 由此可得 $B = \{1, 2, 3\}$ 符合题意.

(2) 由于“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 但“ $x \in A$ ”不是“ $x \in B$ ”的充分条件, 所以集合 B 是集合 A 的真子集, 由此可知 $B = \{1\}$ 符合题意.

15. 下列“若 p , 则 q ”形式的命题中, 哪些命题中的 p 是 q 的充分条件? 哪些命题中的 p 是 q 的必要条件?

- (1) p : 数 a 能被 6 整除, q : 数 a 能被 3 整除.

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

(2) $p: x>1, q: x^2>1$.

(3) $p: b^2=ac, q: \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

(4) $p: A\cap B=A, q: \complement_U B\subseteq \complement_U A$.

【答案】(1) 充分条件；(2) 充分条件；(3) 必要条件；(4) 充要条件.

【分析】

(1) 根据充分条件、必要条件的定义判断；

(2) 根据充分条件、必要条件的定义判断；

(3) 根据充分条件、必要条件的定义判断；

(4) 结合集合的包含关系根据充分条件、必要条件的定义判断；

【详解】

(1) 数 a 能被 6 整除，则一定能被 3 整除，反之不一定成立.即 $p\Rightarrow q, q$ 推不出 p ，所以 p 是 q 的充分条件，但 p 不是 q 的必要条件.

(2) 因为 $x^2>1\Rightarrow x>1$ 或 $x<-1$ ，

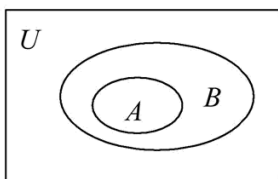
所以 $p\Rightarrow q$ ，且 q 推不出 p .

所以 p 是 q 的充分条件，但 p 不是 q 的必要条件.

(3) $b^2=ac$ 推不出 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ，如 $b=0, c=0$ 时， $b^2=ac$ ，而 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ 无意义.但 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Rightarrow b^2=ac$ ，

所以 p 是 q 的必要条件，但 p 不是 q 的充分条件.

(4) 画出 Venn 图(如图).



结合图形可知， $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B\Rightarrow \complement_U B\subseteq \complement_U A$ ，

反之也成立，所以 p 是 q 的充分条件，且 p 是 q 的必要条件.

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。