

课前预习记录：____月____日 星期____

1.5 全称量词与存在量词

1. 全称量词和全称量词命题

(1) 短语“_____”“_____”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“_____”表示，常见的全称量词还有“一切”“每一个”“任给”“所有的”等。

(2) 含有_____的命题，叫做全称量词命题。

(3) 全称量词命题：“对 M 中任意一个 x ，有 $p(x)$ 成立”，可用符号简记为_____。

2. 存在量词和存在量词命题

(1) 短语“_____”“_____”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“_____”表示，常见的存在量词还有“有些”“有一个”“对某个”“有的”等。

(2) 含有_____的命题，叫做存在量词命题。

(3) 存在量词命题：“存在 M 中的元素 x ，有 $p(x)$ 成立”，可用符号简记为_____。

3. 全称量词命题和存在量词命题的否定

(1) 全称量词命题 $p: \forall x \in M, p(x)$ ，它的否定：_____；

(2) 存在量词命题 $p: \exists x \in M, p(x)$ ，它的否定：_____。

参考答案：

1. (1) 所有的 任意一个 $\forall$ (2) 全称量词 (3) $\forall x \in M, p(x)$

2. (1) 存在一个 至少有一个 $\exists$ (2) 存在量词 (3) $\exists x \in M, p(x)$

3. (1) $\exists x \in M, \neg p(x)$; (2) $\forall x \in M, \neg p(x)$

一、单选题

1. 设 $m \in \mathbf{R}$ ，命题“存在 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是（ ）

A. 对 $\forall m > 0$ ，方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根 B. 对 $\forall m > 0$ ，方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根

C. 对 $\forall m < 0$ ，方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根 D. 对 $\forall m < 0$ ，方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根

【答案】A

【分析】

只需将“存在”改成“任意”，有实根改成无实根即可。

【详解】

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

由存在量词命题的否定是全称量词命题，知“存在 $m > 0$ ，使方程 $x^2 + x - m = 0$ 有实根”的否定是

对 $\forall m > 0$ ，方程 $x^2 + x - m = 0$ 无实根

故选：A

2. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 - x + 5 \geq 0$ ”的否定是（ ）

A. $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 + x + 5 < 0$

B. $\exists x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 - x + 5 \geq 0$

C. $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 - x + 5 > 0$

D. $\exists x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 - x + 5 < 0$

【答案】D

【分析】

由全称量词命题的否定可得出结论.

【详解】

由全称量词命题的否定可知，命题“ $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 - x + 5 \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 - x + 5 < 0$ ”.

故选：D.

3. 命题“ $\exists x \notin \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”的否定是（ ）

A. $\exists x \notin \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 < 0$

B. $\exists x \notin \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$

C. $\forall x \notin \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$

D. 不存在 $x \in \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 > 0$

【答案】C

【分析】

命题的否定是改量词否结论即可

【详解】

解：命题“ $\exists x \notin \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 > 0$ ”的否定是“ $\forall x \notin \mathbf{R}$ ， $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”，

故选：C

4. 若命题“ $\forall x \in [1, 2]$ ， $ax + 1 > 0$ ”是真命题，则 a 的取值范围是（ ）

A. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

B. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $(-1, +\infty)$

D. $[-1, +\infty)$

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

【答案】A

【分析】

根据一次函数的性质得到不等式组，解得即可；

【详解】

解：因为 $\forall x \in [1, 2]$ ， $ax+1 > 0$ ，所以 $\begin{cases} a+1 > 0 \\ 2a+1 > 0 \end{cases}$ ，解得 $a > -\frac{1}{2}$

故选：A

5. 设命题 $p: \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 2x+1$ ，则 p 的否定为（ ）

A. $\forall x \notin \mathbb{Z}, x^2 < 2x+1$

B. $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 < 2x+1$

C. $\exists x \notin \mathbb{Z}, x^2 < 2x+1$

D. $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < 2x$

【答案】B

【分析】

由存在量词命题的否定可直接得到结果.

【详解】

命题 $p: \exists x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 2x+1$ ，则 p 的否定为： $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 < 2x+1$.

故选：B

【点睛】

全称量词命题的否定是存在量词命题，存在量词命题的否定是全称量词命题.

二、多选题

6. 下列说法正确的是（ ）

A. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > -1$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < -1$ ”.

B. 命题“ $\exists x \in (-3, +\infty), x^2 \leq 9$ ”的否定是“ $\forall x \in (-3, +\infty), x^2 > 9$ ”

C. “ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的必要条件.

D. “ $m < 0$ ”是“关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正一负根”的充要条件

【答案】BD

【分析】

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

根据全称量词命题的否定是存在量词命题，存在量词命题的否定是全称量词命题判断 A,B 选项，根据充分条件，必要条件的定义判断 C,D 选项.

【详解】

对于 A 选项，命题“ $\forall x \in R, x^2 > -1$ ”的否定是“ $\exists x \in R, x^2 \leq -1$ ”，故 A 选项错误；

对于 B 选项，命题“ $\exists x \in (-3, +\infty), x^2 \leq 9$ ”的否定是“ $\forall x \in (-3, +\infty), x^2 > 9$ ”，故 B 选项正确；

对于 C 选项， $|x| > |y|$ 不能推出 $x > y$ ， $x > y$ 也不能推出 $|x| > |y|$ ，所以“ $|x| > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的既不充分也不必要条件，故 C 选项错误；

对于 D 选项，关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正一负根 $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$ ，所以“ $m < 0$ ”是“关于 x

的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有一正一负根”的充要条件，故 D 选项正确.

故选：BD

【点睛】

本题考查全称量词命题与存在量词命题的否定，充要条件的判断，考查逻辑推理能力，是中档题. 本题 D 选

项解题的关键在于根据韦达定理和判别式得等价条件 $\begin{cases} 4 - 4m > 0 \\ m < 0 \end{cases}$ ，进而解不等式求得讨论即可.

7. 下列说法中正确的个数是 ()

A. 命题“所有的四边形都是矩形”是存在量词命题

B. 命题“ $\forall x \in R, x^2 + 2 < 0$ ”是全称量词命题

C. 命题“ $\exists x \in R, x^2 + 4x + 4 \leq 0$ ”是存在量词命题

D. 命题“不论 m 取何实数，方程 $x^2 + x - m = 0$ 必有实数根”是真命题

【答案】BC

【分析】

根据存在量词命题和全称量词命题的定义判断 ABC，根据判别式判断 D.

【详解】

A 中命题“所有的四边形都是矩形”是全称量词命题，故 A 错误；

B 中命题“ $\forall x \in R, x^2 + 2 < 0$ ”是全称量词命题，故 B 正确；

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

C 中命题“ $\exists x \in R, x^2 + 4x + 4 \leq 0$ ”是存在量词命题,故 C 正确;

D 中选项当 $\Delta = 1 + 4m < 0$ 时, 即当 $m < -\frac{1}{4}$ 时, 方程 $x^2 + x - m = 0$ 没有实数根,因此, 此命题为假命题.

故选: BC

8. 下列结论中错误的是 ()

A. $\forall n \in N^*, 2n^2 + 5n + 2$ 能被 2 整除是真命题

B. $\forall n \in N^*, 2n^2 + 5n + 2$ 不能被 2 整除是真命题

C. $\exists n \in N^*, 2n^2 + 5n + 2$ 不能被 2 整除是真命题

D. $\exists n \in N^*, 2n^2 + 5n + 2$ 能被 2 整除是假命题

【答案】 ABD

【分析】

举例说明 $n=1$ 时 $2n^2 + 5n + 2$ 不能被 2 整除, $n=2$ 时 $2n^2 + 5n + 2$ 能被 2 整除, 从而得出结论.

【详解】

解: 当 $n=1$ 时, $2n^2 + 5n + 2$ 不能被 2 整除,

当 $n=2$ 时, $2n^2 + 5n + 2$ 能被 2 整除,

所以 A、B、D 错误, C 项正确.

故选: ABD.

【点睛】

本题考查了全称量词命题与存在量词命题的真假性判断问题, 属于基础题.

三、填空题

9. 命题“ $\exists x \in R, x^2 - x + 1 = 0$ ”的否定为_____.

【答案】 $\forall x \in R, x^2 - x + 1 \neq 0$

【分析】

根据存在量词命题的否定为全称量词命题可得.

【详解】

因为存在量词命题的否定为全称量词命题,

所以“ $\exists x \in R, x^2 - x + 1 = 0$ ”的否定为“ $\forall x \in R, x^2 - x + 1 \neq 0$ ”.

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

故答案为: $\forall x \in R, x^2 - x + 1 \neq 0$.

10. 命题“所有无理数的平方都是有理数”的否定是_____.

【答案】存在一个无理数, 它的平方不是有理数

【分析】

根据全称量词命题的否定形式, 即可求解结论.

【详解】

存在一个无理数, 它的平方不是有理数,

全称性命题的否定是先改变量词, 然后否定结论,

故所求的否定是“存在一个无理数, 它的平方不是有理数”.

故答案为: 存在一个无理数, 它的平方不是有理数

【点睛】

本题考查命题的否定形式, 要注意量词之间的转化, 属于基础题.

11. 已知命题 P : “ $\forall x \geq 3$, 使得 $2x - 1 \geq m$ ”是真命题, 则实数 m 的最大值是_____.

【答案】5

【分析】

根据任意性的定义, 结合不等式的性质进行求解即可.

【详解】

当 $x \geq 3$ 时, $2x \geq 6 \Rightarrow 2x - 1 \geq 5$,

因为“ $\forall x \geq 3$, 使得 $2x - 1 \geq m$ ”是真命题, 所以 $m \leq 5$.

故答案为: 5

四、解答题

12. 已知集合 $A = \{x | -3 \leq x < 4\}$, $B = \{x | 2m - 1 \leq x \leq m + 1\}$

(1) 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

(2) 命题 q : “ $\exists x \in A$, 使得 $x \in B$ ”是真命题, 求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $m \geq -1$; (2) $[-4, 2]$.

【分析】

(1) $B \subseteq A$, 分 B 为空集和 B 不是空集两种情况讨论求解即可;

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

(2) 由 $\exists x \in A$, 使得 $x \in B$, 可知 B 为非空集合且 $A \cap B \neq \emptyset$, 然后求解 $A \cap B = \emptyset$ 的情况, 求出 m 的范围后再求其补集可得答案

【详解】

解: (1) ①当 B 为空集时, $m+1 < 2m-1, m > 2$ 成立.

$$\text{②当 } B \text{ 不是空集时, } \because B \subseteq A, \begin{cases} m+1 \geq 2m-1 \\ 2m-1 \geq -3 \\ m+1 < 4 \end{cases}, \therefore -1 \leq m \leq 2$$

综上①②, $m \geq -1$.

(2) $\exists x \in A$, 使得 $x \in B$, $\therefore B$ 为非空集合且 $A \cap B \neq \emptyset, m+1 \geq 2m-1, m \leq 2$.

$$\text{当 } A \cap B = \emptyset \text{ 时 } \begin{cases} 2m-1 \geq 4 \\ m \leq 2 \end{cases}, \text{ 无解或 } \begin{cases} m+1 < -3 \\ m \leq 2 \end{cases}, m < -4,$$

$\therefore A \cap B \neq \emptyset, m \in [-4, 2]$.

13. 判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题, 写出这些命题的否定, 并说出这些否定的真假, 不必证明.

(I) 存在实数 x , 使得 $x^2+2x+3 > 0$;

(II) 菱形都是正方形;

(III) 方程 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 有一个根是奇数.

【答案】答案见解析

【分析】

根据全称量词命题和存在量词命题的定义, 结合全称量词命题的否定是存在量词命题、存在量词命题的否定是全称量词命题进行求解即可.

【详解】

解: (I) 该命题是存在量词命题,

该命题的否定是: 对任意一个实数 x , 都有 $x^2+2x+3 \leq 0$. 因为 $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$

所以该命题的否定是假命题.

(II) 该命题是全称量词命题,

该命题的否定是: 菱形不都是正方形. 因为只有当菱形的邻边互相垂直时, 才能成为正方形, 所以该命题的否定是真命题.

(III) 该命题是存在量词命题,

不积跬步, 无以至千里;
不积小流, 无以成江海。

该命题的否定是：方程 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 的每一个根都不是奇数. 因为方程 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 的根为 2 或 6，所以该命题的否定是真命题.

14. 用符号“ $\forall$ ”与“ $\exists$ ”表示下列含有量词的命题，并判断真假：

- (1) 实数都能写成小数形式.
- (2) 有的有理数没有倒数.
- (3) 不论 m 取什么实数，方程 $x^2 + x - m = 0$ 必有实根.
- (4) 存在一个实数 x ，使 $x^2 + x + 4 \leq 0$.

【分析】

- (1) 按全称量词命题改写，再判断命题真假.
- (2) 按存在量词命题改写，再判断命题真假.
- (3) 按全称量词命题改写，再判断命题真假.
- (4) 按存在量词命题改写，再判断命题真假.

【详解】

- (1) $\forall a \in \mathbf{R}$ ， a 都能写成小数形式，此命题是真命题.
- (2) $\exists x \in \mathbf{Q}$ ， x 没有倒数，有理数 0 没有倒数，故此命题是真命题.
- (3) $\forall m \in \mathbf{R}$ ，方程 $x^2 + x - m = 0$ 必有实根. 当 $m = -1$ 时，方程无实根，是假命题.

- (4) $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使 $x^2 + x + 4 \leq 0$. $x^2 + x + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ 恒成立，所以为假命题.

16. 写出 P 命题的否定，并判断所得命题的真假

- (1) $P: \exists x \in \mathbf{N}, x^2 - 1 = 0$
- (2) $P: \forall x \in \mathbf{R}, x^3 > x^2$

【分析】

根据存在量词命题的否定为全称量词命题，全称量词命题的否定为存在量词命题，写出 (1) (2) 的否定，再判断真假即可.

【详解】

- (1) $\because P: \exists x \in \mathbf{N}, x^2 - 1 = 0$ ， $\therefore$ 否定为： $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 - 1 \neq 0$.

当 $x = \pm 1$ 时， $x^2 - 1 = 0$ ，故所得命题为假命题.

- (2) $\because P: \forall x \in \mathbf{R}, x^3 > x^2$ ， $\therefore$ 否定为： $\exists x \in \mathbf{R}, x^3 \leq x^2$.

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。

对原命题 $P: \forall x \in \mathbf{R}, x^3 > x^2$ ，当 $x = -1$ 时， $-1 < 1$ ，即命题 P 为假命题，

所以命题的否定为真命题.

【点睛】

本题考查含有一个量词的命题的否定及真假性的判断，属于基础题.

不积跬步，无以至千里；
不积小流，无以成江海。